Nachhilfestunde 11

$$f(x)=\frac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Zur Untersuchung einer Kosinus-Funktion und Zusatzaufgaben

Niveau: Gymnasium, LK

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 47031

Stand 12. April. 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 8 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$. Wir besprechen Methoden zur Untersuchung der Funktion, mit interessanten Zusatzaufgaben wie Verkettung von Funktionen und Verkettung von Abbildungen zu einer Spiegelung von K an der Geraden $y = \frac{4}{3}$.

Die Lösungen sind teilweise auf LK-Niveau.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Inhalt

Diese Inhalte werden besprochen:

$\boxed{1}$ Definitionsbereich und Wertmenge von f bzw. K.

$\boxed{2}$ Einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt ohne Ableitungen bestimmen

$\boxed{3}$ Die 1. Ableitung berechnen (doppelte Kettenregel).

$\boxed{4}$ Bestimmung der Periode von f bzw. K.

$\boxed{5}$ Näherungsparabel für den Kurvenbogen im Intervall $[-2\,;\,2]$

$\boxed{6}$ Maximale Abweichung der Näherungsparabel von K
(Extremwertaufgabe mit Grafikrechner lösen.)

$\boxed{7}$ Abbildungsgleichung für die Spiegelung an a: $y = \frac{4}{3}$ aufstellen, indem man zwei Verschiebungen und die Spiegelung an der x-Achse verkettet.

$\boxed{8}$ Spiegelung von K an der Achse a.

$\boxed{9}$ Hat K_0 senkrechte Tangenten am Rande des Definitionsbereichs? Begründung.

$\boxed{1}$ Gegeben: $f(x) = \dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

Der Funktionsterm enthält einen Bruch. Daher sollte man zuerst den Definitionsbereich bestimmen. Wenn nämlich der Nenner Null wird, dann liegt x nicht im Definitionsbereich.

Wann also wird $N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -2$?

$\boxed{\text{GW}}$ Die Kosinusfunktion $h(x) = \cos(x)$ hat den Wertebereich $\mathbb{W}_h = [-1;1]$.

Das heißt. es gibt keinen Wert -2.

Es kann also nicht vorkommen, dass der Nenner Null wird.

Ergebnis: Der **Definitionsbereich** ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Der Definitionsbereich ist die Menge der Zahlen x, zu denen man einen Funktionswert f(x) berechnen kann. Die Menge der möglichen Funktionswerte heißt **Wertmenge oder Wertebereich**.

Beim Funktionsterm f(x) ist der Zähler konstant. Also ändert sich nur der Nenner.

Zunächst gilt: $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \le 1 \qquad | \ +2$

Daraus folgt: $-1\boxed{+2} \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\boxed{+2} \le 1\boxed{+2}$

und daher ist $1 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\boxed{+2} \le 3$

d. h. $1 \le \text{Nenner} \le 3$

Der größte Funktionswert ist daher $y_{max} = \dfrac{4}{\mathbf{1}} = 4$

und der kleinste: $y_{min} = \dfrac{4}{\mathbf{3}}$

f hat daher die Wertmenge $\mathbb{W}_f = \left[\frac{4}{3};4\right]$

Kannst du einen Hochpunkt und *einen* Tiefpunkt angeben, ohne eine Ableitung zu verwenden?

$\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{2}$ Wir haben in $\boxed{1}$ herausgefunden, dass der kleinste Funktionswert $y_{min} = \frac{4}{3}$ ist.

Der entsteht so: $f(x) = \dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \dfrac{4}{3}$, also wenn $u = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$ ist.

Und das erreicht man z. B. durch $\frac{\pi}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $\frac{\pi}{2}x = 2\pi \Leftrightarrow x = 4$ usw.

Entsprechend findet man den größten Funktionswert $y_{max} = 4$ wenn $u = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$

ist, also für $\frac{\pi}{2} \cdot x = \pi \Leftrightarrow x = 2$ usw.

Also ist $H_1(2\,|\,4)$ ein Hochpunkt und $T_1\left(0\,|\,\frac{4}{3}\right)$ ein Tiefpunkt.

Es ist eine Besonderheit von trigonometrischen Funktionen, dass man z. B. hier die Extrempunkte ohne Ableitungen finden kann. Wir wollen aber doch zur Übung auch die Lösung mit Ableitungen finden. Dazu muss man allerdings den unbequemen Funktionsterm ableiten.

Berechne eine Ableitung von $f(x) = \dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.

Ich zeige dir meine Rechnungen im Abschnitt

$\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{3}$ Berechnung der ersten Ableitung zu $f(x) = \dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = 4\cdot\Bigg[\underbrace{2+\cos\Big(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}x}_{v}\Big)}_{u}\Bigg]^{-1}$

f ist **zweifach geschachtelt**:

1. Zuerst wird aus x das v berechnet: $x \xrightarrow{v} v(x) = \frac{\pi}{2}\cdot x$ (Argument)
2. Dann wird aus v das u berechnet: $v \xrightarrow{u} u(v) = 2+\cos(v)$ (Nenner)

   Also ist der Nenner $u = 2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
3. Fuktionswert: $u \xrightarrow{f} f(u) = \frac{4}{u}$ (Bruchterm)

Beispiel: Die Berechnung von $f(2) = \frac{4}{2+\cos(\pi)} = \frac{4}{2+(-1)} = \frac{4}{1} = 4$ geschieht in mehreren Stufen:

1. Zu x = 2 wird $v(2) = \left(\frac{\pi}{2}\cdot\boxed{2}\right) = \pi$ berechnet.
2. Zu $v = \pi$ wird $u(\pi) = 2+\cos(\pi) = 2-1 = 1$ berechnet.
3. Zu u = 1 wird $f(1) = \frac{4}{u(v(2))} = \frac{4}{u(\pi)} = \frac{4}{1} = 4$ berechnet.

Zum Ableiten braucht man daher die **doppelte Kettenregel**:

Aus $f(x) = 4\cdot u^{-1}$ wird $f'(x) = 4\cdot\left[-u^{-2}\right]\cdot u'$

Und da $u = \cos(v)$ eine Funktion von v ist gilt: $u' = \cos'(v)\cdot v' = -\sin(v)\cdot\frac{\pi}{2}$

Wir müssen also zweimal mit der jeweiligen inneren Ableitung multiplizieren.

Insgesamt also: $f'(x) = 4\cdot\left[-u^{-2}\right]\cdot\left[-\sin(v)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$

Rücksubstitution: $f'(x) = \frac{4}{u^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{2}$

bzw. $f'(x) = \frac{4}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{2}$

Zusammenfassen: $f'(x) = \frac{2\pi}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$

oder so: $f'(x) = 2\pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}$

Die Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für **Extrempunkte** führt also zu $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$, also zu

$\frac{\pi}{2}x = z\cdot\pi \Leftrightarrow x = 2z$, d.h. $x \in \{0; \pm 2; \pm 4; ...\}$ $\Rightarrow \boxed{4}$

$\boxed{4}$ Bevor wir uns um das Schaubild von f kümmern, bestimmen wir **die Periode von K bzw. f**.

Grundlage ist: Die Funktion y = cos(x) hat die Periode 2π .

$\boxed{\text{GW}}$ $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ entsteht aus y = cos(x) durch Streckung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$ in x-Richtung. **Der Streckfaktor ist der Kehrwert des x-Faktors.**

Also ist die Periode: $\Delta x = k \cdot 2\pi = \frac{2}{\pi} \cdot 2\pi = 4$.

Daher können wir auch die Menge aller Tiefpunkte angeben:

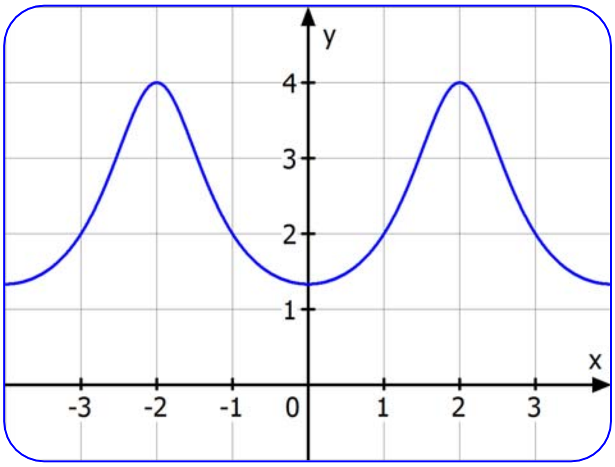
In $\boxed{2}$ haben wir ermittelt: $T_1\left(0 \mid \frac{4}{3}\right)$ ist einer der Tiefpunkte.

Durch die Periode wissen wir nun, dass $T_z\left(4z \mid \frac{4}{3}\right)$ mit $z \in \mathbb{Z}$ alle Tiefpunkte sind.

$H_1(2 \mid 4)$ ist einer der Hochpunkte.

Durch die Periode wissen wir nun, dass $H_z(2 + z \cdot 4 \mid 4)$ mit $z \in \mathbb{Z}$ Hochpunkte sind.

Und nun die Zeichnung dazu:



Neue Aufgabe:

Der Kurvenbogen zwischen den beiden Hochpunkten der Abbildung ähnelt einer Parabel.
Daher die Frage:

Im Intervall [-2;2] soll f durch eine ganzrationale Funktion g vom Grad 2 angenähert werden, die mit f an den Stellen -2 ; 0 und 2 übereinstimmt.

Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für g.

Meine Lösung: $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{5}$ Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$

Weil die Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, gilt dasselbe für das Schaubild K von f und auch für die Parabel von g. Daher kann man den Ansatz vereinfachen:

$$g(x) = ax^2 + c$$

Die Parabel soll durch den Tiefpunkt $T_1\left(0 \mid \frac{4}{3}\right)$ gehen, d. h. es muss gelten:

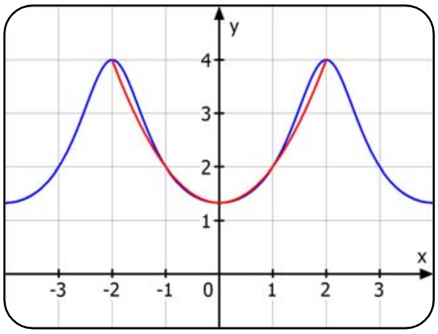
1. Bedingung: $g(0) = f(0) = \frac{4}{3}$ d. h. $c = \frac{4}{3}$ (1)

Die Parabel soll durch den Hochpunkt $H(2 \mid 4)$ gehen, d. h. es muss gelten:

2. Bedingung: $g(2) = f(2) = 4$ d. h. $4a + c = 4$ (2)

c einsetzen in (2): $4a + \frac{4}{3} = 4 \Leftrightarrow 4a = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

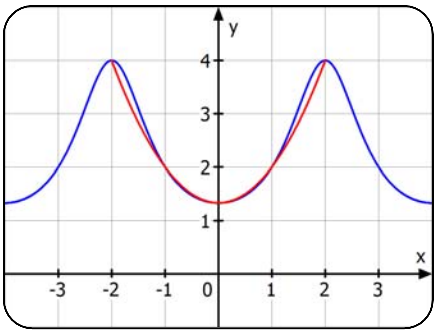
Ergebnis: $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}$



$\Rightarrow \boxed{6}$

$\boxed{6}$

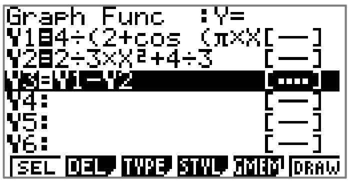
An welchen Stellen des Intervalls [-2 ; 2] weicht die Näherungsfunktion g am stärksten von der Funktion f ab?
Wie groß ist die Abweichung an diesen Stellen?
Wie groß ist im Mittel der Betrag der Abweichung von f und g im angegebenen Intervall?



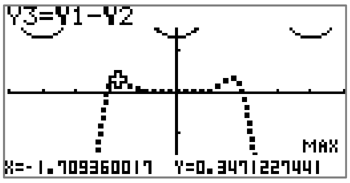
Diese Aufgabe kann man überspringen, denn man löst sie z. B. mit einem Grafikrechner.

Die Funktion $d(x) = |f(x) - g(x)|$ gibt den Absolutbetrag der Abweichung an.

Lösung mit einem Grafikrechner:



Man gibt unter **Y1** die Funktion f ein, unter **Y2** die Funktion g.
Dann definiert man **Y3=Y1-Y2**.
Wenn der Rechner es ermöglicht, dann ist Y3=ABS(Y1-Y2) noch günstiger.
Dann lässt man die Kurven zeichnen und von Y3 MAX anzeigen.



Ergebnis: Die maximale Differenz liegt bei x = -1,71 und daher auch bei x = +1,71. Sie beträgt 0,347 Einheiten.

Nun eine besondere Leistungskurs-Zusatzaufgabe.

Das Schaubild K wird an der durch die Gleichung $y = \frac{4}{3}$ gegebenen Geraden gespiegelt.

Geben Sie die Gleichung des gespiegelten Schaubilds an.

$\Rightarrow \boxed{7}$

7 **Wir arbeiten in diesem Abschnitt mit Abbildungsgleichungen.**

Unser Lösungsweg sieht so aus:

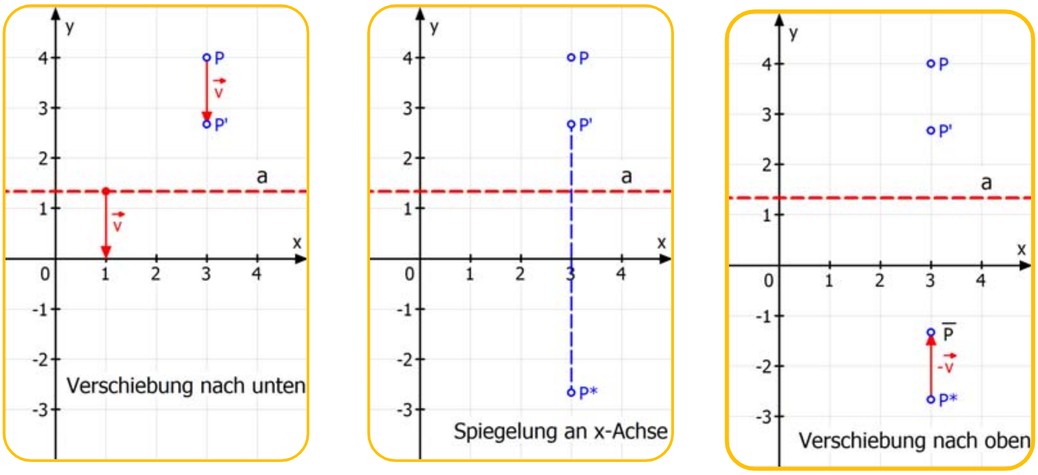
Wir verschieben die Kurve K um $\Delta y = \frac{4}{3}$ nach unten, also in Richtung negative y-Achse.

(Aus P wird dann P'.)

Dann spiegeln wir die verschobene Kurve K' an der x-Achse. Das ergibt K* (bzw. P*).

Danach schieben wir K* um $\Delta y = \frac{4}{3}$ nach oben, also in Richtung der positiven y-Achse.

(Aus P* wird dann $\overline{P}$). $\overline{P}$ ist dann das Spiegelbild von P an der Achse a.



Zu diesen Abbildungen gehören Gleichungen:

Es sei α die erste Verschiebung: $\alpha: \begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = y - \frac{4}{3} \end{Bmatrix}$

Und β die Spiegelung an der x-Achse: $\beta: \begin{Bmatrix} x^* = x \\ y^* = -y' \end{Bmatrix}$

Die 2. Verschiebung: $\gamma: \begin{Bmatrix} \overline{x} = x^* \\ \overline{y} = y^* + \frac{4}{3} \end{Bmatrix}$

Die Verkettung dieser drei Abbildungen ergibt die Spiegelung an a:

$$\delta: \begin{Bmatrix} \overline{x} = x \\ \overline{y} = -\left(y - \frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overline{x} = x \\ \overline{y} = -y + \frac{8}{3} \end{Bmatrix}$$

Dies kontrollieren wir mit Hilfe des Testpunktes $P(3\,|\,4)$:

$$P(3\,|\,4) \xrightarrow{\alpha} P'\left(3\,|\,\tfrac{8}{3}\right) \xrightarrow{\beta} P^*\left(3\,|\,-\tfrac{8}{3}\right) \xrightarrow{\gamma} \overline{P}\left(3\,|\,-\tfrac{4}{3}\right)$$

Und nun mit der Gesamtabbildung δ: $P(3\,|\,4) \xrightarrow{\delta} \overline{P}\left(3\,|\,-4 + \tfrac{8}{3}\right) = \left(3\,|\,-\tfrac{4}{3}\right)$

Nun kennen wir die Abbildungsgleichungen für Punkte.

Um K mit δ abzubilden, muss man diese Gleichungen nach x und y umstellen, damit man einsetzen kann.

$\Rightarrow$ **8**

$\boxed{8}$ Wir sollen die Kurve K: $y = \dfrac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ an der Geraden a: $y = \frac{4}{3}$ spiegeln.

Die Abbildungsgleichungen für Punkte sind: $\delta: \begin{Bmatrix} \overline{x} = x \\ \overline{y} = -y + \frac{8}{3} \end{Bmatrix}$

Umstellen nach x und y: $\delta^{-1}: \begin{Bmatrix} x = \overline{x} \\ y = -\overline{y} + \frac{8}{3} \end{Bmatrix}$

Einsetzen in K: $-\overline{y} + \frac{8}{3} = \dfrac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\overline{x}\right)}$

$$-\overline{y} = \frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\overline{x}\right)} - \frac{8}{3} \qquad | \cdot(-1)$$

$$\overline{y} = \frac{8}{3} - \frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\overline{x}\right)}$$

Hier das Spiegelbild für den
„Periodenbogen“ von 0 bis 4.